KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

METODE OPTIMIZACIJE I NJIHOVA PRIMJENA U GRAĐEVINARSTVU- *nastavak*

1. Linearno programiranje -

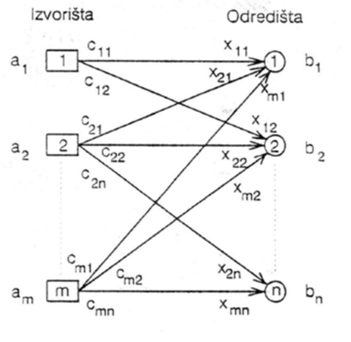
1. **grafička metoda**
2. **simpleks metoda**
3. **transportni problemi**

predavanja koncipirana uglavnom na osnovu knjige:
Ž. Praščević, N. Praščević- Operaciona istraživanja u građevinarstvu, Beograd 2009

P12

Transportni zadatak (problem)

- **Transportni zadatak-** specijalni zadatak iz oblasti linearnog programiranja, koji se odnosi na određivanje optimalnog plana prevoženja nekog materijala ili robe od mjesta otpreme (izvorišta) do mjesta potrošnje (odredišta) ***xij*** koji će najmanje koštati.
- x_{ij} **-** količine materijala koje treba transportovati od izvorišta *i* do odredišta *j*
- c_{ij} poznata cijena transporta po jedinici mjere robe od izvorišta *i* do odedišta *j*
- a_i **–** ukupne količine materijala koje treba transportovati od izvorišta *i* (kapacitet izvorišta)
- b_j **–** ukupne količine materijala koje treba transportovati do odredišta *j* (kapacitet odredišta)
- ***z-*** funkcija cilja – ukupni troškovi transporta



Sl. Shema transportnih puteva

rješavanje u obliku tabele

Odrediđta b Izvorišta a	**b1**	**b2**	**..**	**bn**
a1	c11 x11	c12 x12	..	c1n x1n
a2	c21 x21	c22 x22	..	c2n x2n
…	….	…	..	….
am	cm1 xm1	cm2 xm2	..	cmn xmn

Opšta formulacija transportnog zadatka: matematički model

Transporni zadatak- odrediti količine materijala x_{ij} koje treba transportovati od izvorišta *i* do odredišta *j* tako da ukupna cijena transporta bude minimalna.

1. **Funkcija cilja:**

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

2. **Uslovi ograničenja:**
   - iz izvorišta se transportuje sva proizvedena količina

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad a_i > 0, \qquad i = 1,2 \dots . m$$

   - u odredišta se doprema ukupno potrebna količina

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad b_j > 0, \qquad j = 1,2 \dots . n$$

   - prirodni uslovi nenegativnosti (količina transportovanih roba pojedinim trasama je nenegativna vrijednost)

$$x_{ij} \geq 0, \qquad j = 1,2 \dots . n, x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,2 \dots . m$$

Zatvoreni i otvoreni transportni zadatak

- **Zatvoreni transportni zadatak**: ako se sve što se nalazi u izvorištima doprema do odredišta, odnosno ako je ispunjen uslov

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i, \qquad i = 1,2 \ldots . m \underset{i}{,} j = 1,2 \ldots . n$$

- **Otvoreni transportni zadatak** – kada nije ispunjen prethodni uslov, odnosno kada važi:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \neq \sum_{i=1}^{m} a_i, \qquad i = 1,2 \ldots . m \underset{i}{,} j = 1,2 \ldots . n$$

- **Može se riješti samo zatvoreni transportni zadatak** a otvoreni se na određeni način svodi na zatvoreni, pa se tada i on može riješiti.
  - ako je

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0$$

onda se otvoreni transportni zadatak svodi na zatvoreni dodavanjem još jednog odredišta (u ovom slučaju skladišta) koje može da primi razliku (višak iz izvorišta). To u tabeli znači dodavanje još jedne kolone, a količine u toj koloni predstavljaju količine koje se neće transportovati od izvorišta, pa su cijene transporta u toj koloni jednake 0

  - ako je

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j < 0$$

onda se otvoreni transportni zadatak svodi na zatvoreni dodavanjem još jednog fiktivnog izvorišta koje predstavlja nedostajuće količine koje se u stvari ne transportuu (jer ih nema). U tabeli to znači dodavanje jednog reda, a cijene u tom reu su jednake 0, jer nema njihovog transporta.

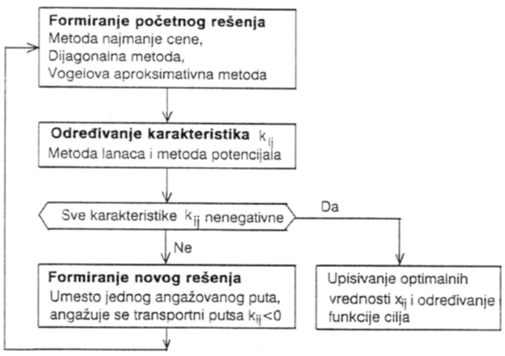
Rješavanje zatvorenog transportnog zadatka

- Može se riješti samo zatvoreni transportni zadatak a otvoreni se na svodi na zatvoreni, pa se tada i on može riješiti istim metodama, kao i zatvoreni
- Uslovi za rješavanje transportnog zadatka
  1. broj nepoznatih ***xij*** koje treba odrediti je ***m x n***
  2. broj uslova ograničenja ***m+n*** (izvorista+odredista)
  3. broj **nezavisnih** uslova ograničenja (za zatvoreni transportni zadatak) je manji za jedan, jer postoji i uslov jednakosti kapaciteta izvorišta i odredišta ***m + n -1***
  4. kako je veći broj nepoznatih od broja jednačina onda se iz sistema nezavisnih jednačina (njih ***m+n-1)*** može izabrati upravo ***m+n-1*** bazisnih promjenljivih koje će se izraziti preko preostalih ***m x n-(m+n-1)*** slobodnih promjenljivih
  5. to znači da će od ***m x n*** puteva transporta ***m+n-1*** puteva biti angažovano za transport, kako bi se sistem mogao riješiti (na njima će x_{ij}>0)
  6. ukoliko se u nekom koraku dobije manje od ***m+n-1*** puteva (polja) onda se dobija degenerisano rješenje
  7. da bi se provjerila optimalnost degenerisanog rješenja nedostajući broj polja (do m+n-1) mora smatrati angažovanim tako da se njih upiše količina ε koja teži 0
- Moguće je modelovati i rješavati problem gdje neki od puteva između ***ai*** izvorišta i ***bj*** odredišta nije moguć. U takvom polju ***ij*** se upisuje cijena transporta ***cij*** nekoliko desetina puta veća od najveće cijene na ostalim transportnim putevima. U postupku iznalaženja optimalnog (minimalnog) rješenja ovo polje će sigurno biti isključeno iz bazičnih promjenljivih, odnosno ***xij*** će biti jednako nuli, kako bi funkcija cilja postigla minimum.

Postupak rješavanja

- Zatvoreni transportni zadatak se jedino može rješavati.
- može se primijeniti simpleks metoda, ali je najčešće potrebno mnogo proračuna zbog velikog broja promjenljivih

- **TRANSPORTNA METODA-** iterativni postupak, čiji su koraci:
  1. utvrđivanje početnog baznog rješenja u formi tabele (za ovo su razvijene posebne metode iznalaženja početnog rješenja)
  2. provjera optimalnosti rješenja (po posebnim metodama za provjeru optimalnosti rješenja)
  3. iznalaženje poboljšanog rješenja (preraspodjela količina i angažovanje novih transportnih puteva) i ponavljanje koraka 2 i 3 dok se ne nađe optimalno rješenje.



Sl. Dijagram toka rešavanja transportnog problema

1. Metode iznalaženja početnog rješenja

- cilj ovih metoda je naći početno rješenje koje ima ***m+n-1*** promjenljivih većih od 0. Ove promjenljive se upisuju u odgovarajuća polja tabele.
- **Angažovana polja** (putevi) su ona polja u tabeli gdje je utvrđeno da postoji xij>0 (u početnom rješenju, ili nakon poboljšanja rješenja)
- **neangažovana polja** (putevi) su ona polja u kojima je pretpostavljeno da je xij=0
- Karakteristike metoda za početno rješenje
  1. promjenljive se pretpostavljaju po određenoj šemi u tabeli, ali tako da ih ima tačno m+n-1 koje su veće od 0; ako ih ima mannje od ovog broja onda se radi o <u>degenerisanom rješenju</u>
  2. metode treba da budu što jednostavnije
  3. metode treba da daju početno rješenje koje je što bliže optimalnom, kako bi se radio manji broj iteracija
- metode za iznalaženje početnog rješenja:
  – dijagonalna metoda (metoda sjeverozapadnog ugla)
    - najjednostavnija;
    - u početnom rasporedu se ne vodi računa o cijenama transporta na pojedinim transportnim putevima
    - popunjava se maksimalnim kapacitetom polje u gornjem lijevom uglu tabele, a zatim se nakon isključivanja reda ili kolone ponovo popunjava polje u gornjem lijevom uglu preostale tabele, sve dok se ne rasporede sve količine
  – metoda najmanje cijene (u koloni, ili redu ili u tabeli)- slična joj je i metoda dvostrukog precrtavanja
    - prilično jednostavna;
    - u početnom rasporedu se vodi računa o tome da se najprije popune polja (putevi) koja imaju najmanju cijenu
  – Vogelova (Fogelova) aproksimativna metoda (VAM)
    - komplikovanija od prethodnih;
    - u početnom rasporedu se vodi računa o tome da se najprije popune polja (putevi) u redu ili koloni koji ima najveću razliku između dvije najmanje cijene u redu odnosno koloni
    - daje rješenje vrlo blisko optimalnom

Metode iznalaženja početnog rješenja

- **DIJAGONALNA METODA**
  - najprije se popunjava gornje lijevo polje (1,1) sa najvećom mogućom količinom =min(a1,b1)
  - isključi se red ili kolona iz daljeg razmatranja čiji su kapaciteti utrošeni
  - ponovo se gornjem lijevom polju preostale tabele raspoređuje najveća količina, i to se ponavlja dok se sve količine ne raspodjele

- $Z = 8 * 60 + 7 * 20 + 5 * 60 + 4 * 20 + 6 * 60 = 1360$

O/I	b1=60	B2=80	B3=80
A1=80	8 (1) 60	7 (2) 20	1
A2=80	3	5 (3) 60	4 (4) 20
A3=60	2	8	6 (5) 60

Metode iznalaženja početnog rješenja

- **METODA DVOSTRUKOG PRECRTAVANJA**
  - na određeni način se u svakom redu obilježi polje sa najmanjom cijenom *
  - na određeni način se u svakoj koloni obilježi polje sa najmanjom cijenom #
  - popunjavaju se sa najvećom mogućom količinom najprije polja koja imaju obje oznake (ako ih je više onda najprije ono sa najmanjom cijenom od svih takvih)
  - zatim polja koja imaju jednu oznaku,
  - na kraju se upisuju preostale količine u preostala neobilježena polja

- $Z = 1 * 80 + 5 * 80 + 2 * 60 = 600$

- *u ovom primjeru se dobilo degenerisano rješenje, jer imaju ukupno 3 angažovanja polja (3 vrijednosti xij>0)*
- *to je moguće rješenje, ali se na određeni način mora modifikovati kako bi se mogla provjeriti njegova optimalnost*

O/I	b1=60	B2=80	B3=80
A1=80	8	7	1 [1] *# 80
A2=80	3 *	5 [3] # 80	4
A3=60	2 [2] *# 60	8	6

Metode iznalaženja početnog rješenja

- **METODA NAMANJE CIJENE**
  - popunjava se sa najvećom mogućom količinom najprije polje koje ima najmanju cijenu u tabeli,
  - zatim se nakon isključenja potrošenog reda odnosno kolone (kojima je iscrpljen kapacitet) traži novo polje sa najmanjom cijenom, koje se ponvoo popunjava najvećom mogućom količinom ***xij***=min (***ai,bj***)
  - postupak se iterativno ponavlja dok se ne rasporede sve količine

- $Z = 1 * 80 + 5 * 80 + 2 * 60 = 600$

- *I u ovom primjeru se dobilo degenerisano rješenje, jer imaju ukupno 3 angažovanja polja (3 vrijednosti xij>0)*
- *to je moguće rješenje, ali se na određeni način mora modifikovati kako bi se mogla provjeriti njegova optimalnost*

O/I	**b1=60**	**B2=80**	**B3=80**
A1=80	8	7	1 *1* 80
A2=80	3	5 80	4
A3=60	2 60	8	6

Metode iznalaženja početnog rješenja

- **VAM METODA**
  - sračunavaju se za svaki red razlike dvije najmanje cijene u redu ***(dr$_i$)***
  - sračunavaju se za svaku kolonu razlike dvije najmanje cijene u koloni ***(ds$_j$)***
  - popunjava se najprije polje sa najmanjom cijenom u redu, ili koloni gdje je ova razlika najveća. U tom se polju piše najveća moguća količina koja se može transportovati ***xij***=min(***ai,bj***)
  - isključi se red ili kola čiji su kapaciteti istrošeni, pa se ponovo sračunavaju ove razlike i ponavlja se postupak izbora polja na osnovu reda odnosno kolone sa najvećom razlikom dvije preostle najmanje cijene

- $Z = 1 * 80 + 5 * 80 + 2 * 60 = 600$
- i ovdje je dobijeno degenerisano rješenje

O/I	**b1=60**	**B2=80**	**B3=80**	**dr$_i$**
A1=80	8	7	**1** [1] 80	**7-1=6**
A2=80	3	**5** [3] 80	4	4-3=1 5-3=2
A3=60	**2** [2] 60	8	6	6-2=4 **8-2=6**
ds$_j$	3-2=1 3-2=1	7-5=2 8-5=3	4-1=3	

Preuzeto iz Pivac Snježana; Statističke metode „Istraživanja koja se sprovode na cijelom osnovnom skupu često su skupa (ili nemoguća=kontrola kvaliteta proizvoda destruktivnim metodama) i zahtijevaju mnogo vremena, pa se u praksi često, koristeći metode i tehnike inferencijalne statistike, na osnovu podataka iz uzorka donose zaključci vezani za osnovni skup. Pri takvom zaključivanju postavljaju se različite pretpostavke ili hipoteze. Potrebno je razlikovati **naučne hipoteze** i **statističke hipoteze**.
Istraživanja koja se sprovode na cijelom osnovnom skupu često su skupa (ili nemoguća=kontrola kvaliteta proizvoda destruktivnim metodama) i zahtijevaju mnogo vremena, pa se u praksi često, koristeći metode i tehnike inferencijalne statistike, na osnovu podataka iz uzorka donose zaključci vezani za osnovni skup. Pri takvom zaključivanju postavljaju se različite pretpostavke ili hipoteze. Potrebno

je razlikovati **naučne hipoteze** i **statističke hipoteze**.
Naučne hipoteze predstavljaju nagađanje, naslućivanje i pretpostavke koje motivišu istraživača. Iz naučne hipoteze, tj. hipoteze istraživača (koja je najčešće afirmativna) izvodi se statistička hipoteza.
Statističke hipoteze=svaka pretpostavka o konkretnoj raspodjeli obilježja X; postavljaju se na način da mogu biti vrednovane statističko-analitičkim postupcima. One su u stvari matematički izraz koji predstavlja polaznu osnovu na kojoj se temelji kalkulacija statističkog testa.

2. Metode provjere optimalnosti rješenja

- cilj ovih metoda je da provjere da li se može naći bolje rješenje (rješenje koje će imati manju ukupnu cijenu)
- Karakteristike metoda za provjeru optimalnosti
  1. radi se proračun karakteristika ***kij*** za svako neangažovano polje tabele
  2. provjerava se vrijednost karakteristika ***kij***, pa ako postoji makar jedna ***kij*** <0, može se naći bolje rješenje od postojećeg
- metode za provjeru optimalnosti rješenja:
  - metoda potencijala
    - jednostavna;
    - za svako angažovano polje (njih m+n-1) sračunavaju se potencijali reda ***ui*** i potencijali kolone ***vj***
    - pošto ovih potencijala ima m+n, a angažovanih polja m+n-1, jedan se potencijal pretpostavlja, a ostali se sračunavaju
    - za svako neangažovano polje sračunava se karakteristika polja ***kij***
    - ako su sve ***kij*** ≥0 onda je rješenje optimalno, u suprotnom na određeni način između određenih polja treba izvršiti preraspodjelu transporta
  - metoda lanaca
    - prilično komplikovana
    - za svako neangažovano polje konstruišu se tzv. lanci
    - za svaki lanac sračunava se karakteristika polja ***kij*** koja zavisi od cijena polja koja su uključena u lanac
    - ako su sve ***kij ≥0*** onda je rješenje optimalno, u suprotnom na određeni način između određenih polja treba izvršiti preraspodjelu transporta

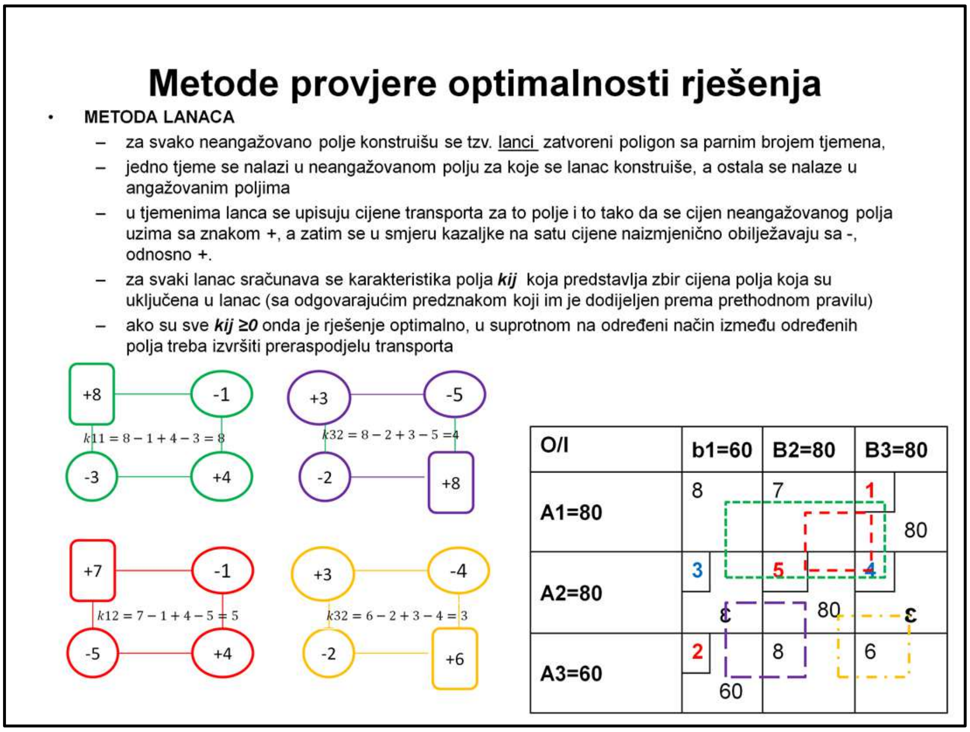
Metode provjere optimalnosti rješenja

- **METODA POTENCIJALA**
  - za svako angažovano polje (njih m+n-1) sračunavaju se potencijali reda ***ui*** i potencijali kolone ***vj***
  - pošto ovih potencijala ima m+n, a angažovanih polja m+n-1, jedan se potencijal pretpostavlja, a ostali se sračunavaju
  - za svako neangažovano polje sračunava se karakteristika polja ***kij=cij-(ui+vj)***
  - ako su sve ***kij ≥0*** onda je rješenje optimalno, u suprotnom na određeni način između određenih polja treba izvršiti preraspodjelu transporta

- *u ovom primjeru smo pošli od početnog degenerisanog rješenja, koje smo pretvorili u nedegenirasno tako što smo dopisali još količine ε u dva polja sa najmanjom cijenom, pa sad imamo m+n-1=3+3+1=5 rješenja **xij>0***
- ***sracunate karakteristike za neangažovana polja kij=cij-(ui+vj)***
- ***k11=8-(0+0)=8***
- ***k12=7-(0+2)=5***
- ***k32=8-(2+2)=4***
- ***k33=6-(2+1)=3***

- ***sve su pozitivne i ovo je optimalno rješenje***

O/I	b1=60	B2=80	B3=80	ui
A1=80	8	7	1 80	0- prvo pretpostavlje no
A2=80	3 ε	5 80	4 ε	3
A3=60	2 60	8	6	2
vj	0	2	1	



Preuzeto iz Pivac Snježana; Statističke metode
„Istraživanja koja se sprovode na cijelom osnovnom skupu često su skupa (ili nemoguća=kontrola kvaliteta proizvoda destruktivnim metodama) i zahtijevaju mnogo vremena, pa se u praksi često, koristeći metode i tehnike inferencijalne statistike, na osnovu podataka iz uzorka donose zaključci vezani za osnovni skup. Pri takvom zaključivanju postavljaju se različite pretpostavke ili hipoteze. Potrebno je razlikovati **naučne hipoteze** i **statističke hipoteze**.
Istraživanja koja se sprovode na cijelom osnovnom skupu često su skupa (ili nemoguća=kontrola kvaliteta proizvoda destruktivnim metodama) i zahtijevaju mnogo vremena, pa se u praksi često, koristeći metode i tehnike inferencijalne statistike, na osnovu podataka iz uzorka donose zaključci vezani za osnovni skup. Pri takvom zaključivanju postavljaju se različite pretpostavke ili hipoteze. Potrebno

je razlikovati **naučne hipoteze** i **statističke hipoteze**.
Naučne hipoteze predstavljaju nagađanje, naslućivanje i pretpostavke koje motivišu istraživača. Iz naučne hipoteze, tj. hipoteze istraživača (koja je najčešće afirmativna) izvodi se statistička hipoteza.
Statističke hipoteze=svaka pretpostavka o konkretnoj raspodjeli obilježja X; postavljaju se na način da mogu biti vrednovane statističko-analitičkim postupcima. One su u stvari matematički izraz koji predstavlja polaznu osnovu na kojoj se temelji kalkulacija statističkog testa.

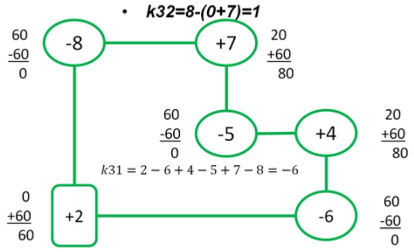
3. Metode iznalaženja poboljšanog rješenja

- **METODA PRERASPODJELE KOLIČINA DUŽ LANACA**
  - lanci koje smo pomenuli prethodno, u stvari predstavljaju sva polja tabele koja su povezana uslovima ograničenja,
  - ako se iz jednog angažovanog polja koje odgovara tjemenu lanca, količina koja se transportuje u tom polju smanji, radi uslova ravnoteže će biti potrebno da se u tjemenima lanca sa pozitivnim predznakom ta količina doda, a u poljima koja odgovaraju tjemenima lanca sa negativnim predznakom ta količina umanji.
  - karakteristike ***kij*** sračunate za lance koji su konstruisani za neangažovana polja mjere povećanje, odnosno smanjenje funkcije cilja, ukoliko se duž tog lanca izvrši preraspodjela 1 jedinice mjere količine robe,, tj. $\Delta z = k_{ij} \cdot \Delta x_{ij}$
  - količina Δx_{ij} koja se može preraspodijeliti duž lanca je najmanja količina u poljima koja odgovaraju tjemenima lanca sa negativnim predznakom
  - zato nas za poboljšano rješenje interesuju samo ona polja kojima odgovaraju negativne karakteristike ***kij*** i to od svih njih ona:
    - ***kij*** koja ima najveću apsolutnu vrijednost ili
    - lanac sa negativnom karakteristikom za koji je maksimalno smanjenje funkcije cilja, tj. $\Delta z = k_{ij} \cdot \Delta x_{ij}$
  - u svakoj iteraciji se radi preraspodjela samo duž jednog lanca (mada može i simultano ukoliko lanci nemaju zajedničkih tjemena)
  - napomena: ako je ***kij=0,*** onda ima više optimalnih rješenja

3. Metode iznalaženja poboljšanog rješenja

- METODA PRERASPODJELE KOLIČINA DUŽ LANACA
  - na početnom rješenju dobijenom dijagonalnom metodom primjenjena je metoda potencijala za provjeru optimalnosti i sračunate su karakteristike
    - ***k13=1-(0+6)=-5***
    - ***k21=3-(8-2)=-3***
    - ***k31=2-(0+8)=-6***
    - ***k32=8-(0+7)=1***

O/I	b1=60	B2=80	B3=80	ui
A1=80	8 / 60	7 / 20	1	0
A2=80	3	5 / 60	4 / 20	-2
A3=60	2	8	6 / 60	0
vj	8	7	6	

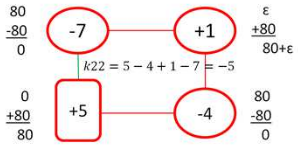


- *po izvršenoj preraspodjeli dobijeno je degenerisano rješenje, pa se moraju dodatno angažovati još dva polja i ponovo se primjenjuje neka metoda za provjeru optimalnosti*
- *metodom potencijala su ponovo sračunate karakteristike neagažovanih polja*
- ***k12=8-(0+0)=8***
- ***k22=5-(3+7)=-5***
- ***k32=8-(0+7)=1***
- ***k33=6-(0+1)=6***

O/I	b1=60	B2=80	B3=80	ui
A1=80	8	7 / 80	1 / ε	0
A2=80	3 / ε	5	4 / 80	3
A3=60	2 / 60	8	6	0
vj	0	7	1	

3. Metode iznalaženja poboljšanog rješenja

- **METODA PRERASPODJELE KOLIČINA DUŽ LANACA**



O/I	b1=60	B2=80	B3=80	ui
A1=80	8	7 80	1 ε	0
A2=80	3 ε	5	4 80	3
A3=60	2 60	8	6	0
vj	0	7	1	

- *po izvršenoj preraspodjeli ponovo je dobijeno degenerisano rješenje, pa se mora dodatno angažovati još jedno polje i ponovo se primjenjuje neka metoda za provjeru optimalnosti*
- *metodom potencijala su ponovo sračunate karakteristike neagažovanih polja*
- ***k12=8-(0+0)=8***
- ***k22=7-(0+2)=5***
- ***k32=8-(2+2)=4***
- ***k33=6-(2+1)=3***

- sve karakteristike su pozitivne pa je dobijeno optimalno rješenje
- ***x13=80***
- ***x22=80***
- ***x31=60, ostalo xij=0,***
- ***min z =80*1+5*80+2*60=600***

O/I	b1=60	B2=80	B3=80	ui
A1=80	8	7	1 80	0
A2=80	3 ε	5 80	4 ε	3
A3=60	2 60	8	6	2
vj	0	2	1	

Literatura

- Ž. Praščević, N. Praščević: Operaciona istraživanja u građevinarstvu, Čugura print, Beograd, 2009,